

Szymon Chudziak

ORCID: 0000-0001-6093-4030

sc63269@sgh.waw.pl

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

<https://doi.org/10.26366/PTE.ZG.2023.233>

Open Access CC BY 4.0



Cytowanie: Chudziak, S. (2023). Modele wyboru konsumenta. *Zeszyty Naukowe Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego w Zielonej Górze*, 18, s. 5-22. DOI: 10.26366/PTE.ZG.2023.233

Modele wyboru konsumenta

Abstrakt: Eksperymenty i badania empiryczne w powtarzalny sposób wykazują niedostatki standardowego podejścia do modelowania wyborów konsumentów, opartego na teorii preferencji i optymalizacji międzyokresowej. W ekonometrycznych badaniach oraz alternatywnych metodach przedstawiania procesów decyzyjnych niemal zawsze zawarte jest założenie o istnieniu czynnika losowego wpływającego na ostateczny wybór. Niektóre formy takich zachowań są spójne z założeniem o optymalizacji użyteczności, ale mogą też mieć interpretację behawioralną. W tym artykule przedstawiono przegląd metod stosowanych do modelowania wyborów jednostek w celu przybliżenia tej tematyki. Ponieważ cała literatura jej dotycząca skupiała się na zastosowaniach różnych podejść do badań z użyciem danych empirycznych, stworzono ogólny szkielet modeli opartych na agentach konsumenckich podejmujących wiele decyzji. Stanowi to przyczynek do budowy wieloagentowych modeli zachowań konsumentów spójnych z praktyką badań ekonometrycznych.

Słowa kluczowe: decyzje konsumenta; modelowanie rynku; wybór produktu

Consumer Choice Models

Abstract: Experiments and empirical research consistently demonstrate the shortcomings of the standard approach to modelling consumer choices, based on the theory of preferences and intertemporal optimization. In econometric studies and alternative methods of presenting decision-making processes, there is almost always an assumption of the existence of a random factor affecting the final choice. Some forms of such behaviour are consistent with the assumption of utility maximization, but they can also have a behavioural interpretation. This article presents an overview of methods used to model individual choices in order to approximate this topic. Since the entire literature on the subject has focused on the application of various approaches to research using empirical data, a general framework of models based on consumer agents making multiple decisions has been developed. This contributes to the construction of multi-agent models of consumer behaviour consistent with the practice of econometric research.

Keywords: consumer decisions; market modelling; product choice

JEL: A10, D01, D04

Wprowadzenie

W przeciwieństwie do standardowego podejścia do przedstawiania wyboru konsumenta, ujętego w teoretycznej mikroekonomii jako połączenie teorii preferencji oraz optymalizacji międzyokresowej, w badaniach empirycznych niemal zawsze stosowane są alternatywne modele. Powszechnym jest założenie o tym, że proces wyboru zawiera w sobie element

losowości, co sprawia, że model decyzyjny jest niedeterministyczny. Takie rozwiązanie ma liczne uzasadnienia; rzeczywiste układy preferencji pojedynczych ludzi nie są znane, a dane, którymi dysponują badacze lub poszczególne przedsiębiorstwa nie pozwalają określić takich układów. Co więcej, nawet gdyby było to możliwe, nie niosłoby to wiadomości o preferencjach poszczególnych konsumentów, dotyczących nowych dóbr (zarówno w ramach istniejących rodzajów jak i tworzących zupełnie nowy rynek), jeszcze niewprowadzonych do sprzedaży.

W niniejszej pracy przedstawiono przegląd metod stosowanych do modelowania wyborów jednostek oraz najnowszych badań stosujących je do różnych problemów badawczych dotyczących zachowania konsumentów oraz ogólny szkielet modeli opartych na agentach konsumenckich podejmujących wiele decyzji. Model ten może uwzględniać wpływ różnych narzędzi marketingowych na decyzje klientów, a także rolę różnych czynników jakościowych i cenowych. Ponadto proponuje, jak modelować różnice w gustach dotyczących jakości i tolerancji na cenę między ludźmi należącymi do różnych części rozkładu dochodów, tj. do jego różnych percentyli. Artykuł ma na celu zaznajomienie szerszego grona ekonomistów z rozwojem oraz zastosowaniami metodyki ekonometrycznej w zakresie modelowania decyzji konsumentów oraz położenie podwalin pod modelowanie wieloagentowe tego zagadnienia.

1. Modelowanie dokonywanych przez ludzi wyborów

Wiele badań nad zachowaniem konsumentów motywowanych jest podejściem empirycznym, ale takie podejście zawsze poprzedza teoria. Louis Thurnstone był pierwszym badaczem, który zaproponował interpretację opcji wyboru jako opisanej przez liczbę na „skali psychologicznej” (Thurstone, 1927). W tym podejściu możliwość o najwyższej wartości psychologicznej, subiektywnej, jest pożądana (wybrana).

Sam w sobie ten koncept nie stoi w sprzeczności z mikroekonomiczną teorią wyboru. Jednak większość badań eksperymentalnych skierowanych na testowanie teorii racjonalnego wyboru ujawnia, że zachowanie ludzi jest niezgodne z słabą aksjomatyką ujawnionych preferencji i innymi aksjomatami standardowej mikroekonomicznej teorii wyboru (Andreoni & Miller, 2002; Birnbaum & Schmidt, 2008; Diaye & Urdanivia, 2009; Grace, 1993; Grüne-Yanoff, 2012; Guadalupe-Lanas, Cruz-Cárdenas, Artola-Jarrín, & Palacio-Fierro, 2020; Hey & Orme, 1994; Loomes, Starmer, & Sugden, 1991; Manzini, Mariotti, & Mittone, 2010; Sippel, 1997; Zizzo, Stolarz-Fantino, Wen, & Fantino, 2000). Te naruszenia standardowej teorii wyboru często wykazywały wzór, który nie może być pogodzony z żadnym deterministycznym ramami. Ze względu na te wyniki i brak satysfakcjonującego modelu ludzkiego zachowania,

badania empiryczne i eksperymentalne prawie zawsze traktują indywidualne zachowanie wyborcze jako probabilistyczne. Oznacza to, że wynik problemu decyzyjnego jednostki -- rzeczywisty wybór dokonany przez daną osobę -- jest traktowany jako częściowo losowy.

Pierwsza próba opisu i reprezentacji wyboru jednostki z perspektywy psychologicznej, ale w sposób ilościowy, została podjęta przez Thurstone'a, który sformułował prawo porównawczego osądu (Thurstone, 1927). Wbrew swojej nazwie jest to model, który można stosować do uzyskiwania pomiarów z dowolnego procesu porównywania parami. Opiera się on na następującej intuicji: założmy, że decydent stoi przed serią bodźców lub zestawem przedmiotów do wyboru. Ta cecha, która może być przypisana skutkom każdego z tych wyborów, definiuje kontinuum psychologiczne dla tej konkretnej decyzji. Thurstone stwierdził, że z psychologicznego punktu widzenia różnica w obserwowanych wyborach zależy od tego, że decydent nie jest konsekwentny w swoich osądach porównawczych w różnych sytuacjach wyboru i może reagować inaczej na dwie identyczne sytuacje wyboru w dwóch różnych punktach czasowych. Thurstone argumentował, że istnieje stopień losowości w decyzjach ludzkich (Thurstone, 1927). Choć może to być prawdą lub nie, bez wątpienia ani badacz, ani firma działająca na danym rynku nie mogą być pewni, że znają wszystkie motywacje, gusta i preferencje decydenta (np. potencjalnego klienta).

Thurstone podkreślił, że skala psychologiczna to nic innego jak sztuczna konstrukcja; twierdził, że jeśli ma ona jakieś fizyczne odpowiedniki -- takie jak rzeczywiste procesy w ludzkim mózgu -- to badacze nie mają możliwości poznania, jakie mogą one mieć (Thurstone, 1927). Nawet dzisiaj współczesna neurobiologia nie odkryła jeszcze, jak mogą wyglądać takie procesy. Dlatego możemy albo podążać za radą Thurstone'a i definiować skalę w terminach częstotliwości wyników procesów decyzyjnych (sytuacja tak/nie lub wybór ze skończonego dyskretnego zbioru), albo interpretować opcję o największym prawdopodobieństwie jako tę, którą wybierze decydent.

Rozwiązaniem Thurstone'a było przedstawienie procesu decyzyjnego z dwoma opcjami jako modelu probitowego, w którym różnica między wartościami dwóch porównywanych obiektów podlega rozkładowi normalnemu (Thurstone, 1927). Pozwala to uzyskać wyrażenie o stałej wartości dla różnicy wartości skali psychologicznej dwóch porównywanych opcji. Problem z taką specyfikacją pojawia się, gdy dopuszcza się większą liczbę obiektów do wyboru. Powodem jest dobrze znany problem braku rozwiązania w postaci zamkniętej dla prawdopodobieństw opisywanego modelu probitu multinomialnego, co wymaga kosztownych i czasochłonnych symulacji z użyciem numerycznej integracji, aby uzyskać ich oszacowania.

Najbardziej wpływowym modelem w historii optymalizacji zachowań i badaniach empirycznie uzasadnionych wyborów konsumentów, z którego wywodzi się większość współcześnie stosowanych modeli, jest wzór stworzony przez Duncana Luca, znany jako reguła Luca (Luce, 1959). Ta reprezentacja ma prostotę deterministycznej teorii, chociaż jest stochastyczna. Każda opcja wyboru j dostępna dla decydenta ma wartość Luca, v_j , a prawdopodobieństwo wyboru s z zestawu CS zawierającego s jest równa

$$P_j = \frac{v_j}{\sum_k^J v_k} \quad (1)$$

gdzie v_j jest stochastyczne, na przykład składa się z części deterministycznej i losowej. Wartość Luca v_j interpretuje się jako miarę pożądanosti. Dostępne produkty lub opcje są pożądane ze względu na ich obserwowalne cechy lub ze względu na cechy wyborcy (które mogą odpowiadać określonym rodzajom towarów lub usług, na przykład); losowa część wartości Luca, obecna we większości modeli wyboru konsumentów, z wyjątkiem podejścia opartego na aksjomatach i preferencjach standardowej teorii mikroekonomicznej wyboru, reprezentuje niepewność decyzji ludzkich i fakt, że badacz nie może zaobserwować wszystkich determinantów wyboru i różnic między jednostkami.

Pierwotnie wzór logitowy został opracowany przez Luca (Luce, 1959) na podstawie założeń dotyczących cech prawdopodobieństw wyboru, a mianowicie niezależności nieistotnych alternatyw (NNA, ang. *irrelevance of independent alternatives* -- IIA). Użyteczność, którą decydent uzyskuje z alternatywy j , jest rozkładana na (1) część oznaczoną jako V_j^i , która jest znana badaczowi do pewnych parametrów, oraz (2) część nieznaną jako ε_j^i , która jest traktowana przez badacza jako losowa:

$$U_j^i = V_j^i + \varepsilon_j^i \quad (2)$$

Ta reprezentacja jest zwykle nazywana modelem losowej użyteczności. Jednakże jej zastosowanie nie wymaga założeń, że decydenci używają funkcji użyteczności lub maksymalizują ich wartość. Ta formuła została udowodniona jako równoważna modelom, które mogą być interpretowane jako czysto behawioralne, takie jak model logitowy (McFadden, 1978).

Model logitowy jest uzyskiwany przez założenie, że każdy składnik ε_j^i jest niezależnie, identycznie rozdzielony jako wartość ekstremalna. Różnica każdej pary tych składników

podlega rozkładowi logistycznemu. Użyteczność reprezentatywna zwykle jest określana jako liniowa względem parametrów. Z tym założeniem prawdopodobieństwa logitowe stają się:

$$P_j^i = \frac{\exp(\beta'x_j^i)}{\sum_{j' \in J} \exp(\beta'x_{j'}^i)} \quad (3)$$

W modelu logitowym każdy z nieobserwowanych składników ε_j^i -- interpretowanych jako losowe lub behawioralne -- jest niezależny i ma jednowymiarowy rozkład wartości ekstremalnych (RWE, ang. *generalised extreme value distribution* -- GEV). To skutkuje tym, że prawdopodobieństwa wyboru każdej opcji są rozkładami wartości ekstremalnych zgeneralizowanymi.

W modelu logitowym wielowymiarowym decydenci wykorzystują swoje cechy jako zmienne wyjaśniające. Natomiast logit warunkowy wykorzystuje cechy wyborów w tym celu. Logit hybrydowy łączy te dwa podejścia (czytelnik jest zachęcany do przeczytania artykułu (Hoffman & Duncan, 1988), choć autorzy nazywają to narzędzie mieszanym modelem logitowym, co może powodować nieporozumienia, ponieważ ten termin stał się nazwą jeszcze innego modelu).

Ogólna forma modelu Luca stawia przed sobą problem, po raz pierwszy sformułowany przez Gerarda Debreu: „problem duplikatów” (Debreu, 1960). Zakładając, że konsument musi wybrać jeden z trzech produktów, z których dwa są bardzo podobne, a trzeci jest znacznie inny, może się zdarzyć, że każdy z produktów jest wybierany z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ w sytuacji wyboru między jednym z pierwszych dwóch produktów i trzecią opcją, ale ta ostatnia jest wybierana częściej, gdy osoba stoi przed wyborem z trzejelementowego zbioru. Takie zachowanie nie może być generowane przez regułę Luca. Faruk Gul, Paulo Natenzon i Wolfgang Pesendorfer udowodnili, że w środowisku z wieloma opcjami i zestawami opcji, reguła wyboru spełnia aksjomat niezależności wtedy i tylko wtedy, gdy jest to reguła Luca (Gul et al. (2014)). Podejmują oni ten problem z perspektywy teorii mikroekonomicznej i odpowiadają na niego, zakładając, że wybory są określone przez listę atrybutów. Ich proponowana reguła wyboru rozwiązuje słabości modelu Luca, ale zachowuje pojęcie, że wybór zależy od wartości pożądanego. Decydent postrzega atrybuty w sposób subiektywny, tzn. są one właściwościami konsumenta, a nie samych produktów. Gul et al. (2014) zaproponowali model, który wyznacza zestaw atrybutów wpływających na decyzje konsumentów na podstawie obserwowanych losowych wyborów. Innymi słowy, ich podejście jest *ex post*; wyjaśnia decyzje podejmowane przez konsumenta, ale nie zapewnia mocy predykcyjnej. Ponadto nie wiadomo, jak oddzielnie zidentyfikować intensywność atrybutów i ich wartość.

W rzeczywistości literatura empiryczna już rozwiązała problem niezależności zbędnych alternatyw charakterystyczny dla modelu logit. Istnieją dwie główne podejścia do rozwiązania tego problemu, oba mogą uwzględniać efekty atrybutów produktu na wybory konsumentów poprzez włączenie hybrydowej reprezentacji systemu prawdopodobieństwa (jak w modelu hybrydowym logit). Badacz może zastosować model zagnieżdżony lub mieszany logit.

Zagnieżdżony model logitowy jest uzyskiwany poprzez założenie, że nieobserwowalne lub losowe korzyści, lub aspekty zachowania konsumenta i oceny dostępnych opcji do wyboru, $\{\varepsilon_j^i\}_{j=0}^J$, podlegają modyfikacji ogólnej dystrybucji wartości ekstremalnych używanej w modelu logitowym; rozkład krańcowy każdego ε_j^i pozostaje wciąż wartością ekstremalną jednowymiarową, ale są skorelowane w ramach gniazd, jednak pozostają niezależne między gniazdami. W ten sposób właściwość NNA zachodzi wewnątrz każdego gniazda, ale nie między gniazdami. Podsumowując, stosowanie zagnieżdżonego modelu logitowego jest wskazane, gdy zbiór opcji w zestawie wyborów można podzielić na podzbiory (gniazda) takie, że dla każdej pary alternatyw, które znajdują się w tym samym gnieździe, stosunek prawdopodobieństw jest niezależny od atrybutów lub istnienia wszystkich innych alternatyw, ale ta właściwość nie zachodzi między elementami z różnych gniazd (Train, 2003).

Oznaczając przez θ_m miarę stopnia niezależności nieobserwowanej składowej behawioralnej między opcjami w gnieździe m , wzór na prawdopodobieństwo zagnieżdżonego logitu jest następujący:

$$P_j^i = \frac{\exp\left(\frac{V_j^i}{\theta_m}\right) \left(\sum_{j \in J_m} \exp\left(\frac{V_j^i}{\theta_m}\right)\right)^{\theta_m - 1}}{\sum_m \left(\sum_{j \in J_m} \exp\left(\frac{V_j^i}{\theta_m}\right)\right)^{\theta_m - 1}} \quad (4)$$

Dla niektórych sytuacji wyboru najlepiej jest zastosować zagnieżdżone modele logitowe o wielu poziomach zagnieżdżenia. Modele trzy-poziomowe są uzyskiwane poprzez podzielenie zbioru alternatyw na gniazda, a następnie podzielenie każdego gniazda na podgniazda; wyższe poziomy są uzyskiwane analogicznie. Równanie prawdopodobieństwa pozostaje takie samo jak powyżej, ale z dodatkowymi sumowaniami (gniazda niższego poziomu) dla każdego nowego poziomu wyboru. Andrew Daly i Stan Zachary, Daniel McFadden oraz H. C. W. L. Williams niezależnie od siebie udowodnili, że zagnieżdżony model logitowy jest zgodny z maksymalizacją użyteczności (Daly & Zachary, 1978; McFadden, 1978; Williams, 1977).

W wielu sytuacjach jednak własność niezależności nieistotnych alternatyw w gniazdach jest zbyt restrykcyjna i nierealistyczna. Wtedy sytuacja wyborcza nie może być reprezentowana

za pomocą zagnieżdżonego modelu logitowego. Innymi słowy, czasami wzorce substytucji między produktami są bardziej skomplikowane, a zmiana prawdopodobieństwo wyboru jednej alternatywy nie pociąga za sobą proporcjonalnych zmian w stosunkach prawdopodobieństw wyboru dla wszystkich par opcji. Ponadto model logitowy nie może reprezentować zmienności losowych preferencji. W takich sytuacjach stosowanie modelu logitowego mieszanych jest odpowiednie; stosuje się w nim mieszaną rozkładu uogólnionej wartości skrajnej i innego rozkładu, dostarczonego przez badacza (Train, 2003).

Prawdopodobieństwo wyznaczone przez mieszany model logitowy, podobnie jak te wynikające z modeli logitowych i zagnieżdżonych logitowych, jest zgodne z zachowaniem maksymalizującym użyteczność. Ta reprezentacja może być zapisana na kilka sposobów, co ma różne interpretacje. Pierwszy sposób zapisu modelu logitowego mieszanej klasy traktuje współczynniki mnożące obserwowalne cechy (produktu/opcji lub decydenta) jako losowe współczynniki. Decydent staje przed wyborem spośród J alternatyw. Użyteczność osoby i z wybranej opcji j jest określana jako

$$U_j^i = \beta^i x_j^i + \varepsilon_j^i \quad (5)$$

gdzie ε_j^i ponownie jest rozłożone według rozkładu wartości skrajnych. Współczynniki β^i są rozłożone według pewnej funkcji gęstości. Tak więc, ta specyfikacja pokazuje, że logit mieszany jest bardzo podobny do standardowej formuły logitowej, z wyjątkiem tego, że współczynniki dla obserwowalnych cech są losowe, a nie stałe. W takim przypadku prawdopodobieństwo wyboru opcji j , warunkowe na β^i , jest

$$P_j^i(\beta^i) = \frac{\exp(\beta^i x_j)}{\sum_{j' \in J} \exp(\beta^i x_{j'})} \quad (6)$$

Jak zawsze, w modelach z losowymi współczynnikami wartości współczynników są nieznane. Oznacza to, że bezwarunkowe prawdopodobieństwo wyboru -- prawdopodobieństwo logitu mieszanego -- można uzyskać tylko przez scałkowanie wzoru warunkowego dla wszystkich możliwych wartości β^i , zgodnie z założonym rozkładem prawdopodobieństwa tego parametru, traktowanego jako zmienna losowa:

$$P_j^i = \int_{\beta} \frac{\exp(\beta^i x_j)}{\sum_{j' \in J} \exp(\beta^i x_{j'})} f(\beta) d\beta \quad (7)$$

Mieszany model logitowy można stosować bez interpretacji losowych współczynników, jeśli używa się równoważnej specyfikacji. Możemy przedstawić składowe błędów, które tworzą korelacje między użytecznościami różnych opcji, w takim przypadku mamy

$$U_j^i = \alpha x_j^i + \mu^i z_j^i + \varepsilon_j^i \quad (8)$$

gdzie x_j^i i z_j^i są wektorami obserwowanych zmiennych odnoszących się do alternatywy j , α jest wektorem stałych współczynników, μ^i jest wektorem losowych składników o zerowej wartości oczekiwanej, a ε_j^i jest losową zmienną o rozkładzie wartości skrajnych. Część losowa wzoru - tj. losowa użyteczność lub zachowanie reguły wyboru -- jest dana przez sumę $\mu^i z_j^i + \varepsilon_j^i$. Odpowiednie określenie zmiennych z_j^i pozwala wprowadzić korelacje między możliwymi wyborami, co ma efekt obejścia właściwości niezależności nieistotnych alternatyw.

Model logitowy mieszanego nie wykazuje ani NNA, ani restrykcyjnych wzorców substytucji prostego modelu logitowego; w modelu logitowego mieszanego stosunki prawdopodobieństwa wyboru zależą od wszystkich danych, w tym cech alternatyw innych niż porównywane dwie. Ponadto, ten model umożliwia skonstruowanie reguły decyzyjnej podobnej do opisanej przez zagnieżdżony model logitowy. W tym celu określa się zmienną sztuczną dla każdej grupy (ang. *nest*), która wynosi 1 dla każdej opcji w grupie i 0 dla alternatyw należących do innych grup.

Własność niezależności od bez znaczenia alternatyw jest zbyt restrykcyjna, ponieważ systemy atrybutów konsumentów nie są obserwowane przez firmy w rzeczywistym świecie. Rzeczywistym problemem jest reprezentacja wyboru -- jak sformułować problem? Jaka jest minimalna lista funkcji niezbędnych do wiarygodnego przedstawienia rynku teoretycznie i, po sformułowaniu teorii, służyć jako podstawa do estymacji? Pierwszym problemem jest to, że powyższe reprezentacje wyboru konsumenta nie zostały zastosowane w modelach z dużą, dyskretną liczbą produktów. Standardowe podejście oparte na optymalizacji i analizie matematycznej nie jest odpowiedzią, ponieważ będzie cierpieć na przekleństwo wymiarowości. Dlatego algorytmiczne metody wieloagentowe są niezbędne do teoretycznej konstrukcji i analizy takich modeli.

2. Współczesne empiryczne zastosowania modeli wyboru

Modele wyboru używane są przede wszystkim do odwzorowania i określenia ilościowego mechanizmu zachowań konsumenckich na danym rynku. Czasami takie użycie modelu służy jedynie pokazaniu jego zalet w stosunku do starszych odmian; na przykład Train stworzył elastyczny sposób przedstawiania rozkładu losowych współczynników w mieszanym modelu logitowym oraz zastosował go do badania wyborów konsumentów na rynku internetowych usług wideo (Train, 2016).

Felix Becker, Mazen Danaf, Xiang Song, Bilge Atasoy oraz Moshe Ben-Akiva zajęli się badaniem wpływów zróżnicowania pomiędzy poszczególnymi jednostkami z próby oraz pomiędzy tymi samymi jednostkami w różnych sytuacjach wyboru. Szacowanie modeli dyskretnego wyboru na danych panelowych pozwala na przybliżone określenie heterogeniczności preferencji w badanej populacji. Podczas gdy mieszanym model logitowy z losowymi parametrami jest głównie używany do uwzględnienia zróżnicowania między osobami, preferencje mogą również różnić się w różnych sytuacjach wyboru tej samej osoby. Przed badaniem Beckera et al. mieszane modele logitowe uwzględniające zarówno heterogeniczność między- jak i wewnątrzosobową, były szacowane za pomocą procedury maksymalnego symulowanego prawdopodobieństwa (ang. maximum simulated likelihood), jednak staje się ona kosztowna obliczeniowo wraz ze wzrostem wielkości próby. Dodatkowe kłopoty mogą pojawić się w wypadku wielu dominant rozkładu funkcji wiarygodności opisującej daną próbę. Z tego względu Becker et al. zaproponowali hierarchiczny, bayesowski estymator, który uwzględnia oba wyżej wymienione poziomy heterogeniczności i badali jego własności za pomocą symulacji, analizując do jakiego stopnia prawdziwa heterogeniczność może być odtworzona podczas symulacji. Ich wyniki pokazują, że zlekceważenie heterogeniczności wewnątrzosobowej powoduje obciążenie wyników oszacowania oraz pogarsza jakość ogólnego dopasowania modelu do danych. (Becker, Danaf, Song, Atasoy, & Ben-Akiva, 2018).

Badanie Fontany et al. podkreśla znaczenie zarówno efektów lokalnych, jak i struktury rynkowej w procesie podejmowania decyzji o zmianie dostawcy energii elektrycznej na rynkach detalicznych, a także wprowadza nową definicję gospodarstwa domowego jako zbiór cech jego członków. Magda Fontana, Martina Iori oraz Consuelo Rubina Nava zastosowały bayesowski mieszanym model logitowy aby przeanalizować zachowania związane ze zmianą dostawcy na włoskim rynku detalicznym energii elektrycznej. Wykazali, że zróżnicowanie w kontekście geograficznym i społecznym wyboru oraz w składzie gospodarstwa domowego

ma istotny wpływ na istotność i identyfikację czynników decydujących o zmianie dostawcy, co sugeruje, że nie istnieje polityka zachęcająca do zmiany dostawcy, która oddziaływałaby na wszystkie gospodarstwa domowe ze względu na ich heterogeniczność (Fontana, Iori, & Nava, 2019).

Używając uogólnionego mieszanego modelu logitowego z parametrem skali służącym uwzględnieniu heterogeniczności preferencji wśród uczestników badania, Di Fang, Rodolfo Nayga, Heather Snell, Grant West oraz Claudia Bazzani stwierdzili, że nowe oznaczenie produktu zmienia zachowanie kupujących przy wyborze żywności. Nowe oznakowanie zmniejsza preferencje konsumentów zarówno dla oryginalnych, jak i niskotłuszczowych jogurtów (Fang, Nayga, Snell, West, & Bazzani, 2019).

Marco Giansoldati, Lucia Rotaris, Mariangela Scorrano i Romeo Danielis zbadali preferencje konsumentów względem samochodów elektrycznych a samochodów benzynowych używając modeli logitowych: wielowymiarowego, mieszanego oraz dwóch hybrydowych (tj. łączących wielowymiarowe oraz warunkowe podejście) mieszanych modeli logitowych. (Giansoldati, Rotaris, Scorrano, & Danielis, 2020).

Mazen Danaf, Bilge Atasoy i Moshe Ben-Akiva przedstawili rozszerzenie estymatora klasy ukrytej (latent class estimator) dla mieszanego modelu logitowego oraz hierarchicznego estymatora zaproponowanych przez Beckera et al. (2018), aby uwzględnić elastyczne, semiparametryczne rozkłady mieszane (Danaf, Atasoy, & Ben-Akiva, 2020). To rozluźnia założenia normalności i pozwala modelować badanych konsumentów jako posiadających różne indywidualne macierze kowariancji. Ich wyniki pokazują, że gdy dane pochodzą z dwóch lub więcej odrębnych klas (z różnymi średnimi populacji i macierzami kowariancji między- i wewnątrzsobowymi), zaproponowany przez nich model daje lepsze dopasowanie i prognozy w porównaniu do modelu jednoklasowego. (Sarrias, 2020).

Z drugiej strony, Rico Krueger, Michel Bierlaire, Ricardo Daziano, Taha Rashidi i Prateek Bansal, badając zdolność mieszanych modeli logitowe z nieobserwowaną heterogenicznością międzyosobową i wewnątrzosobową do dokładnego prognozowania zachowań wyborczych na poziomie jednostkowym, pokazali, że mieszane modele logitowe z nieobserwowaną heterogenicznością między- i wewnątrzosobową nie zapewniają istotnych ulepszeń w dokładności prognozowania wyborów w porównaniu do standardowych mieszanych modeli logitowych, które uwzględniają tylko zmienność preferencji międzyosobowych (Krueger, Bierlaire, Daziano, Rashidi, & Bansal, 2021). Ten wynik utrzymywał się nawet w przypadkach o wysokim poziomie wewnątrzosobowej zmienności preferencji oraz gdy liczba sytuacji wyboru przypadających na jedną osobę jest duża. Ponadto, Krueger et al. stwierdzili, że

mieszane modele logitowe z nieobserwowaną heterogenicznością między- i wewnątrzsobową mają istotne wady, mianowicie ich oszacowanie wymaga co najmniej siedmiokrotnie większego czasu obliczeniowego w porównaniu do standardowych mieszanych modeli logitowych.

Problem ustalania cen dla pojedynczego produktu, który doświadcza efektów sieciowych był przedmiotem rozważań Fatmeha Nosrata, Williama Coopera oraz Zizhuo Wanga (Nosrat, Cooper, & Wang, 2021). Przedstawili popyt konsumentów za pomocą modelu wyboru konsumenta, w którym każda osoba wybiera pomiędzy zakupem produktu a brakiem wydatków na dane dobro. W tym celu użyli mieszanego, wielowymiarowego modelu logitowego zmodyfikowanego w celu uwzględnienia efektów sieciowych; zakładają bowiem, że istnieje wiele segmentów w populacji potencjalnych nabywców oraz że wewnętrzne wartości produktu dla jednostek i wrażliwość na efekt sieciowy różnią się w zależności od konkretnej grupy.

Mieszany model logitowy został wykorzystany także przez Aliego Behnoda, Milada Haghaniego i Emadaldina Golafshaniego w celu określenia prawdopodobieństwa zakupu pojazdów zautomatyzowanych przez konsumentów w różnych stanach Stanów Zjednoczonych (Behnood, Haghani, & Golafshani, 2022). Ponadto, w celu uwzględnienia różnych warstw nieobserwowanej heterogeniczności i uzyskania lepszego dopasowania statystycznego, dopuścili zmienność średnich i wariancji losowych parametrów pomiędzy obserwacjami. Wyniki estymacji ujawniają istotne różnice między czynnikami determinującymi preferencje konsumenta wobec częściowo i w pełni zautomatyzowanych pojazdów.

3. Ogólne ramy modelowania

Pomysł polega na przedstawieniu wyboru konsumenta jako złożenia czterech osobnych problemów. Pierwszy z nich to decyzja o zakupie nowego produktu z danej kategorii za pomocą funkcji wskaźnikowej f^c , która bierze pod uwagę stan zużycia posiadanej rzeczy z kategorii c oraz łączny wpływ marketingu branżowego jako argumentów. Drugi to wybór klasy cenowej przez konsumenta. Trzeci -- wybór produktu z danego zestawu, zdefiniowanego przez kategorię towarów i klasę cenową.

Ogólna forma f^c to

$$f^c(d_t^{c,i}, \{M_{t-L}^c\}_{L=0}^{L^{max}}) \quad (9)$$

gdzie wzór pozwala na możliwość wpływu marketingu z poprzednich okresów na współczesną decyzję konsumenta. Ogólny wpływ marketingu wszystkich firm może być zdefiniowany jako

suma zmiennych marketingowych firm $m_t^{c,j}$, zdefiniowanych poniżej, gdzie j jest wskaźnikiem dla danej firmy.

Ocena wpływu działań promocyjnych, reklamowych i innych działań zwiększających popyt poszczególnych firm staje przed problemem, że decyzje konsumentów nie są konieczne prostymi funkcjami wydatków firm. Z tego powodu funkcje wykładnicze lub liniowe mają w tym przypadku niepożądane cechy. Ponadto, zachowanie konsumenta często wykazuje satysfakcjonowanie. Dodatkowo można oczekiwać, że po przekroczeniu pewnego progu otrzymywanie większej liczby sygnałów marketingowych od firmy nie spowoduje istotnej zmiany postawy konsumenta wobec produktu. Z tych powodów modelowanie wpływu marketingu na pojedynczego decydenta powinno być przeprowadzone za pomocą ograniczonej funkcji, takiej jak te tradycyjnie stosowane do reprezentowania wyboru konsumenta: model logitowy i jego różne odmiany (takie jak omawiane powyżej).

$$m_t^{c,j,i} = h^{j,i}(\{expd_{t-L}^j\}_{L=0}^{L^{max}}, qt_t^j, q_t^j) \quad (10)$$

gdzie q_t^j to (obiektywna) jakość produktu z kategorii c , wyprodukowanego przez firmę j , która może być rozumiana jako jego parametry techniczne lub cechy, natomiast qt_t^j to zmienna mierząca stopień, w jakim jakość (cechy) dobra odpowiada gustom konsumenta i . Na przykład wybór między garniturem a dresami będzie różnił się dla różnych ludzi, nawet jeśli cena zostanie pominięta.

Istniejące modele wyboru konsumenta albo nie uwzględniają kwestii ceny, albo pozwalają tylko na włączenie ceny jako jednej z wielu cech dostępnych produktów. W przypadku drugim ceny wprowadzane są do zbioru zmiennych wyjaśniających, które zostają uwzględnione w wybranej przez badacza wersji wzoru logit. Takie podejście nie uwzględnia możliwości, że wybór klasy cenowej -- przedziału cenowego -- dla nowego produktu z pożądanej kategorii jest jakościowo oddzielony od kolejnego procesu wyboru ostatecznego dobra do zakupu (w którym cena powraca do wzoru wyboru).

Zgodnie z teoriami rachunkowości umysłowej i kategoryzacji, ludzie grupują swoje wydatki na różne kategorie towarów w systematyczny sposób. Oznacza to, de facto, istnienie budżetów umysłowych o różnej częstotliwości w czasie. Wynika z tego, że wydatki ludzi na różne grupy towarów są ograniczone przez kombinację tych reguł behawioralnych i dostępnych środków finansowych -- tych zgromadzonych na bieżących kontaktach konsumentów lub ustawionych w odniesieniu do pewnego punktu odniesienia. Oznacza to, że wiele osób nie

może sobie pozwolić na wszystkie produkty z danej kategorii, zarówno z powodu ograniczeń budżetowych, jak i potrzeby dokonywania wielu zakupów przed następnym przyływem dochodu (np. jedzenie w luksusowych restauracjach codziennie przeciwstawione gotowaniu w domu przy użyciu tańszych produktów).

Po ustanowieniu takich ograniczeń -- świadomie lub nawykowo -- na wydatki w danym okresie, decydent musi zdecydować, które z elementów ustanowionego zbioru dostępnych i dopuszczalnych towarów zakupić.

Przedstawione ramy teoretyczne opierają się na założeniu, że każdy pojedynczy konsument ma:

- pewien stopień gustu w zakresie jakości,
- poziom tolerancji cenowej,
- preferencje dotyczące cech wtórnych (kolor, wzór itp.) -- dla niektórych konsumentów mogą one mieć silniejszy wpływ na decyzję wyboru niż gust w zakresie jakości; dla towarów takich jak odzież można założyć, że te dwie kategorie się pokrywają.

„Jakość” odnosi się tutaj do wszystkich technicznych i wizualnych elementów, które wpływają na wybór konsumenta. Może ona zostać dalej zróżnicowana na parametry techniczne, kolor, rodzaj wzoru, markę itp. (z wyłączeniem aktywnych rodzajów marketingu, takich jak reklama lub promocja marki). W rzeczywistości rynkowej te dwie kategorie są ze sobą splecione. Definiując tę relację jako zmienną jednej zmiennej qt_t^j , możemy określić jej dziedzinę jako przedział $[0,1]$; im bliżej qt_t^j jest do 1, tym silniejszy jest gust w zakresie jakości i większa jest tolerancja cenowa.

Poza gustem w zakresie jakości i tolerancją cenową, konsument jest ograniczony swoim budżetem. W przypadku badań empirycznych opartych na danych dotyczących rozkładu dochodów lub modelach teoretycznych z agentami zróżnicowanymi pod względem dochodu, konsumenci mogą być traktowani jako zmieniający swoje podejście do jakości/ceny wraz z postępowaniem w górę rozkładu. Nawet przy założeniu stałego rozkładu, oznacza to, że osoby należące do różnych jednostek analizy, tj. kwantyli dochodów, nie mają tego samego gustu w zakresie jakości i tolerancji cenowej.

Indywidualna firma $\$j\$$ nie kieruje swoich produktów do całego rozkładu dochodów gospodarstw domowych. W idealizowanej sytuacji, adresuje swoje produkty tylko do fragmentu, dla uproszczenia rozumianego jako zamknięty przedział z punktami procentowymi końcowymi, $[\underline{p}_n, \bar{p}_n]$.

Tym samym, jakość produktu q_t^j musi być dopuszczalna dla konsumenta \bar{p}_n , cena P_t^j musi być akceptowalna dla konsumenta \underline{p}_n , a spełnione muszą być następujące warunki:

$$\frac{q_t^j}{P_t^j} \geq qt(\bar{p}_n) \geq qt(\underline{p}_n) \quad (11)$$

$$P_t^{adm}(\underline{p}_n) \geq P_t^j \quad (12)$$

$$P_t^{adm}(\bar{p}_n) \geq P_t^j \quad (13)$$

lub

$$P_t^j \leq \frac{q_t^j}{qt(\bar{p}_n)} \leq \frac{q_t^j}{qt(\underline{p}_n)} \quad (14)$$

oraz

$$P_t^j \leq P_t^{adm}(\underline{p}_n) \leq P_t^{adm}(\bar{p}_n) \quad (15)$$

W rzeczywistości ani $qt(\cdot)$ ani $P_t^{adm}(\cdot)$ nie są obserwowalne z punktu widzenia firm. Ponadto sprzedawcy nie wiedzą, do których percentyli dochodów należą ich klienci. Zatem budowanie modelu rynku, który uwzględnia zarówno popyt, jak i podaż, z wieloma agentami, wymaga założeń, że zachowanie firm odbiega od doskonałej wiedzy i racjonalności. Firma powinna przyjąć pewien proces prognozowania. Być może najbardziej realistycznym rozwiązaniem byłoby założenie prostego prognozowania opartego na metodach regresji, gdzie jako predyktory przychodów służą cena i jakość lub ustalanie cen i pozycjonowanie jakości według ad hoc proceduralnych reguł decyzyjnych.

Jak radzić sobie z problemem „duplikatów”? Po pierwsze, ten problem zostaje rozwiązany, jeśli zachowanie konsumentów jest modelowane za pomocą zagnieżdżonego modelu logitowego. Po drugie, można użyć modelu logit mieszany w tym samym celu, ponieważ pozwala on na dowolny wzór substytucji, w tym równoważny z zagnieżdżonym modelem logitowym, z dodatkiem mieszanej dystrybucji prawdopodobieństwa dla losowej części reguły zachowania. Po trzecie, badacz może wprowadzić zmienną mierzącą unikalność w zbiorze wyboru i dodać do systemu zachowania konsumentów smak na unikalność. Po czwarte, problem "duplikatów" został zaobserwowany w eksperymentach dotyczących "powtarzających

się" problemów wyboru, które bardzo mało się różniły lub wcale się nie różniły pod względem składu zbioru wyboru. Być może niespójność była faktycznie spowodowana tym, że druga sytuacja składała się z już znanych problemów, a przełączanie się między bliskimi odpowiednikami -- duplikatami -- na bardziej różne możliwości było w rzeczywistości manifestacją smaku na nowość, a ta ostatnia opcja po prostu stała się bardziej wartościowa niż ta wcześniej wybrana i jej "duplikat". Ponadto przykłady problemu "duplikatów" dotyczyły tylko porównywania dostępnych produktów lub opcji, ale nie ich cech i cen. Po uwzględnieniu tych aspektów oraz właściwości nowości między nimi, ten problem prawdopodobnie przestanie istnieć, zarówno w ustawieniu obliczeniowym, jak przedstawionym w tym artykule, jak i w analizie analitycznej, jak przedstawionej przez Gula et al. (Gul et al., 2014).

Zadanie reprezentowania zachowania konsumentów dotyczącego wyboru produktu w takim modelu rynkowym stoi przed następującą przeszkodą z perspektywy badacza: nie wiadomo, jakie są rzeczywiste rozkłady gustów konsumentów, cechy klientów, takie jak miejsce w dochodowej dystrybucji, wiek i zakupione produkty, rzadko można połączyć w celu uzyskania kompleksowej bazy danych. Informacje zebrane przez poszczególne firmy są, z oczywistych powodów, zachowywane w tajemnicy. Dlatego wszelkie teoretyczne próby modelowania całego rynku opierają się na założeniach dotyczących rzeczywistych form popytu i struktury dochodu, a w wielu przypadkach także na składzie zestawu produktów.

Może to wyglądać zniechęcająco. Jednak taka podejście nie jest niczym nowym w ekonomii: w rzeczywistości jest stosowane nieustannie w teorii makroekonomicznej lub organizacji przemysłowej. Jedno dobro, kompozycja funkcji Dixita-Stiglitz spektrum rynku, ad hoc ciągłość towarów są powszechne w analizie teoretycznej. Zatem nie jest to przeszkodą z punktu widzenia praktyki badawczej. Co więcej, ramy oparte na losowych modelach wyboru konsumenta mają dodatkową atrakcyjność, że są bliższe podejściom empirycznym i rzeczywistym procesom decyzyjnym. Wreszcie, umożliwiają modelowanie składu rynku, który zmienia się przynajmniej częściowo nielosowo, na podstawie gustów konsumentów, podczas gdy preferencje dla nowości dają nie-mechaniczne (tj. nie wynikające z niekompletnych funkcji Dixita-Stiglitz) uzasadnienie dla innowacji produktowych.

Podsumowanie

Ekonomiści i ekonometrycy osiągnęli znaczne postępy w przedstawianiu dokonywania wyboru przez człowieka jako agenta ekonomicznego lub przez firmę. Wydaje się, że najnowsze narzędzia badawcze – mieszane modele logitowe – pozwalają na odwzorowanie dowolnego

rzeczywistego zachowania, nawet tego niespełniającego sztywnych, nierealistycznych wymogów narzucanych przez standardową teorię mikroekonomii oraz modele starszej klasy (tj. niepodlegającemu zasadzie niezależności nieistotnych alternatyw). Znajduje to odzworowanie w licznych zastosowaniach empirycznych, których przykłady zostały przytoczone w tej pracy.

Pomimo powszechnego stosowania modeli wyboru konsumenta w ekonomii stosowanej, ekonometrii i wykorzystania takich narzędzi przez niektóre podmioty gospodarcze, ramy te nie zostały jeszcze zastosowane do badania teorii ekonomii przy użyciu narzędzi obliczeniowych. Modele agentowe są szczególnie odpowiednie do tego celu ze względu na ich elastyczność i zdolność do reprezentowania znacznie większej liczby wzorców zachowań niż zwykłe metody analityczne. W niniejszym artykule dokonano przeglądu modeli wyboru konsumenta i sformułowano ogólne wytyczne dotyczące ich stosowania w modelach agentowych na jednym lub kilku rynkach. Otwiera to drogę do budowy takich modeli w przyszłości, co umożliwi badania teoretyczne zagadnień związanych z wyborami wielu konsumentów, konkurencji o klientów oraz rywalizacji i zmian na danym rynku. To pozwoli na systematyczne formułowanie hipotez oraz na połączenie wnioskowania teoretycznego z badaniami ekonometrycznymi, które dotychczas były jedynymi, które stosowano do rozważania tych zagadnień. Modele teoretyczne potrzebne są jednak do formułowania hipotez i teorii, które mogą być później weryfikowane przez następne badania ekonometryczne, co z kolei pozwoli na poprawianie tych pierwszych.

Bibliografia

Andreoni, J., & Miller, J. (2002). Giving According to GARP: An Experimental Test of the Consistency of Preferences for Altruism. *Econometrica*, 70(2), 737–753. <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00302>

Becker, F., Danaf, M., Song, X., Atasoy, B., & Ben-Akiva, M. (2018). Bayesian estimator for Logit Mixtures with inter- and intra-consumer heterogeneity. *Transportation Research Part B: Methodological*, 117, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.06.007>

Behnood, A., Haghani, M., & Golafshani, E. M. (2022). Determinants of purchase likelihood for partially and fully automated vehicles: Insights from mixed logit model with heterogeneity in means and variances. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 159, 119–139. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2022.03.017>

Birnbaum, M. H., & Schmidt, U. (2008). An experimental investigation of violations of transitivity in choice under uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 37(1), 77–91. <https://doi.org/10.1007/s11166-008-9043-z>

- Daly, A., & Zachary, S. (1978). Improved Multiple Choice Models. In D. A. Hensher & M. Q. Dalvi (Eds.), *Determinants of travel choice*. Westmead: Saxon House.
- Danaf, M., Atasoy, B., & Ben-Akiva, M. (2020). Logit mixture with inter and intra-consumer heterogeneity and flexible mixing distributions. *Journal of Choice Modelling*, 35, 100188. <https://doi.org/10.1016/j.jocm.2019.100188>
- Debreu, G. (1960). Reviewed Work(s): Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis by R. Duncan Luce. *American Economic Review*, 50(1), 186–188
- Diaye, M.-A., & Urdanivia, M. W. (2009). Violation of the transitivity axiom may explain why, in empirical studies, a significant number of subjects violate GARP. *Journal of Mathematical Psychology*, 53(6), 586–592. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2009.07.007>
- Fang, D., Nayga, R. M., Snell, H. A., West, G. H., & Bazzani, C. (2019). Evaluating USA's New Nutrition and Supplement Facts Label: Evidence from a Non-hypothetical Choice Experiment. *Journal of Consumer Policy*, 42(4), 545–562. <https://doi.org/10.1007/s10603-019-09426-z>
- Fontana, M., Iori, M., & Nava, C. R. (2019). Switching behavior in the Italian electricity retail market: Logistic and mixed effect Bayesian estimations of consumer choice. *Energy Policy*, 129, 339–351. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2019.01.060>
- Giansoldati, M., Rotaris, L., Scorrano, M., & Danielis, R. (2020). Does electric car knowledge influence car choice? Evidence from a hybrid choice model. *Research in Transportation Economics*, 80, 100826. <https://doi.org/10.1016/j.retrec.2020.100826>
- Grace, R. C. (1993). Violations of transitivity: Implications for a theory of contextual choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 60(1), 185–201. <https://doi.org/10.1901/jeab.1993.60-185>
- Grüne-Yanoff, T. (2012). Paradoxes of Rational Choice Theory. In S. Roeser, R. Hillerbrand, P. Sandin, & M. Peterson (Eds.), *Handbook of Risk Theory* (pp. 499–516). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1433-5_19
- Guadalupe-Lanas, J., Cruz-Cárdenas, J., Artola-Jarrín, V., & Palacio-Fierro, A. (2020). Empirical evidence for intransitivity in consumer preferences. *Heliyon*, 6(3), e03459. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e03459>
- Gul, F., Natenzon, P., & Pesendorfer, W. (2014). Random Choice as Behavioral Optimization. *Econometrica*, 82(5), 1873–1912. <https://doi.org/10.3982/ECTA10621>
- Hey, J. D., & Orme, C. (1994). Investigating Generalizations of Expected Utility Theory Using Experimental Data. *Econometrica*, 62(6), 1291. <https://doi.org/10.2307/2951750>
- Hoffman, S. D., & Duncan, G. J. (1988). Multinomial and conditional logit discrete-choice models in demography. *Demography*, 25(3), 415–427. <https://doi.org/10.2307/2061541>
- Krueger, R., Bierlaire, M., Daziano, R. A., Rashidi, T. H., & Bansal, P. (2021). Evaluating the predictive abilities of mixed logit models with unobserved inter- and intra-individual heterogeneity. *Journal of Choice Modelling*, 41, 100323. <https://doi.org/10.1016/j.jocm.2021.100323>
- Loomes, G., Starmer, C., & Sugden, R. (1991). Observing Violations of Transitivity by Experimental Methods. *Econometrica*, 59(2), 425. <https://doi.org/10.2307/2938263>
- Luce, R. D. (1959). *Individual choice behavior*. Wiley.

Manzini, P., Mariotti, M., & Mittone, L. (2010). Choosing monetary sequences: Theory and experimental evidence. *Theory and Decision*, 69(3), 327–354. <https://doi.org/10.1007/s11238-010-9214-7>

McFadden, D. (1978). Modeling the Choice of Residential Location. In S. K. Lundqvist, F. Snickars, & J. W. Weibull (Eds.), *Spatial Interaction Theory and Planning Models* (pp. 75–96). Amsterdam.

Nosrat, F., Cooper, W. L., & Wang, Z. (2021). Pricing for a product with network effects and mixed logit demand. *Naval Research Logistics (NRL)*, 68(2), 159–182. <https://doi.org/10.1002/nav.21943>

Sarrias, M. (2020). Individual-specific posterior distributions from Mixed Logit models: Properties, limitations and diagnostic checks. *Journal of Choice Modelling*, 36, 100224. <https://doi.org/10.1016/j.jocm.2020.100224>

Sippel, R. (1997). An Experiment on the Pure Theory of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, 107(444), 1431–1444. <https://doi.org/10.1111/j.1468-0297.1997.tb00056.x>

Thurstone, L. L. (1927). A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34(4), 273–286. <https://doi.org/10.1037/h0070288>

Train, K. (2003). *Discrete Choice Methods with Simulation*. Cambridge University Press.

Train, K. (). Mixed logit with a flexible mixing distribution. *Journal of Choice Modelling*, 19, 40–53. <https://doi.org/10.1016/j.jocm.2016.07.004>

Williams, H. C. W. L. (1977). On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit. *Environment and Planning A: Economy and Space*, 9(3), 285–344. <https://doi.org/10.1068/a090285>

Zizzo, D. J., Stolarz-Fantino, S., Wen, J., & Fantino, E. (2000). A violation of the monotonicity axiom: Experimental evidence on the conjunction fallacy. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 41(3), 263–276. [https://doi.org/10.1016/S0167-2681\(99\)00076-1](https://doi.org/10.1016/S0167-2681(99)00076-1)